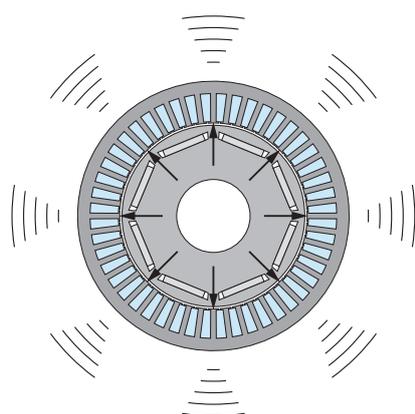


埋込磁石同期電動機（IPMSM）における電磁共振条件の検討

鈴木照平 Shohei Suzuta
坂本宏紀 Hiroki Sakamoto
姉川憲永 Norihisa Anegawa

キーワード 音振動, 共振条件, IPMSM

概要



電磁力による騒音

埋込磁石同期電動機（IPMSM）は高出力密度かつ高効率であることから、産業機器や電気自動車（EV）で広く使用されている。EVは静音性の要求が強く、その主要部品であるIPMSMの音振動特性の改善が必要である。IPMSMの音や振動の主な原因には、ステータコアで発生する電磁力とステータコアの共振がある。

そこで、共振条件を明らかにするため、ステータコアの解析モデルを導出し、電磁力の特性を詳しく検討した。その結果、今まで報告されていなかった共振条件を明らかにした。この研究結果を応用することで、ステータコアの共振回避設計を実現でき、IPMSMの音振動特性向上に貢献する。

1 まえがき

埋込磁石同期電動機（IPMSM）は、高出力密度かつ高効率であることから産業界で広く使用されている。近年では製品軽量化のためのモータの小形化及び高速化が進み、それらの影響でモータ内部に生じる磁束密度の増加、半径方向電磁加振力の増大を引き起こし、音・振動の問題が生じている。

半径方向加振力は、ステータコア及びモータケースの円環モードを励起し、モータケースから発生する金属音のような放射音の主要因となる。この放射音に関する研究は、これまでに多く報告されている。しかし、共振条件に関しては、十分明らかになっていない。本稿では、まずIPMSMの電磁力を空間及び時間に関してフーリエ変換し、調和加振力として定義する。次に、有限要素法モデルから48自由度へと縮小したモデルを用い、ステータコアと

電磁力の共振条件を明らかにしたので紹介する。

2 IPMSMの電磁力特性

2.1 電磁界解析方法

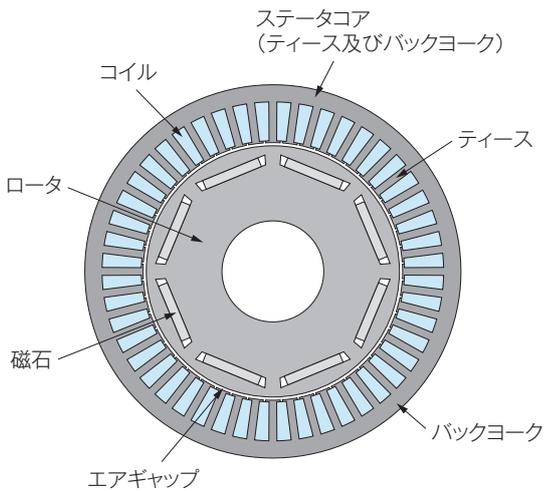
IPMSMでは、ステータコアとロータの間にわずかな空間（エアギャップ）が存在する。そのエアギャップに磁束が集中し、ステータコアとロータの高調波磁束が相互干渉する。この相互干渉から生じる電磁力がステータコアを加振する。これが騒音原因の一つとなることが知られている。そのため、電磁力とステータコアの共振条件を把握することは、騒音低減に必要である。そこで、まずステータコアへ作用する電磁力を検討する。

第1図に8極48スロットのIPMSM断面図を示す。解析対象は電気自動車（EV）で一般的に使用されている8極48スロットのIPMSMで、汎用の電磁

界解析ソフトを用いて2次元の電磁界解析を行う。解析モデルは反周期性を考慮し $\pi/4$ のモデルを用い、電気角1周期分($\pi/2$)を181ステップで計算する。また、ロータの回転数を f_r とすると電源電流周波数 f_e は極対数が4であることから $f_e = 4f_r$ となる。さらに電源電流周期 T_e は $T_e = 1/f_e = 1/(4f_r)$ となる。磁束密度の測定位置はエアギャップの中心とし、タイムステップごとに半径方向と周方向の磁束密度 B_r, B_θ を導出する。各ティースに働く電磁力は、周方向に対して半径方向が比較的大きいことが一般的に知られている⁽¹⁾ため、半径方向の電磁力を検討する。求めた磁束密度を用いて式(1)からエアギャップに働く半径方向電磁力 σ_r を導出する。

$$\sigma_r = \frac{1}{2\mu_0} (B_r^2 - B_\theta^2) \dots\dots\dots(1)$$

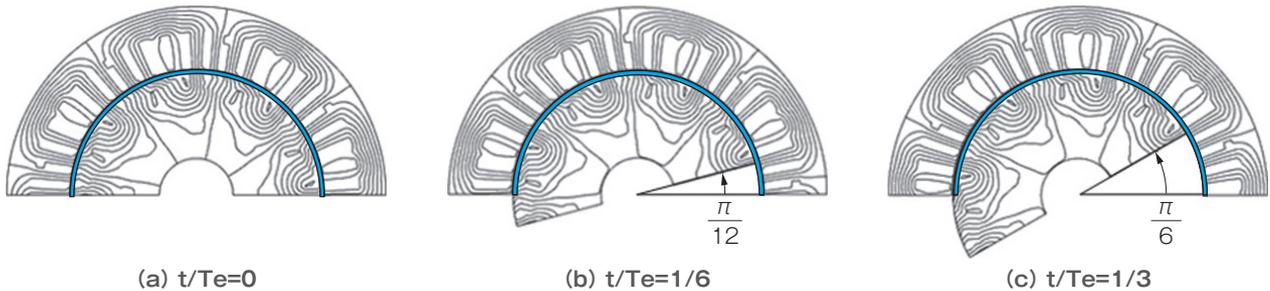
ただし、 μ_0 は真空の透磁率である。求めた電磁力を



第1図 8極48スロットのIPMSM断面図

解析対象モデルである8極48スロットのIPMSM断面形状及び各部分の名称を示す。

.....



第2図 磁束線の時間変化

磁束線は、ロータとともに回転していることを示す。

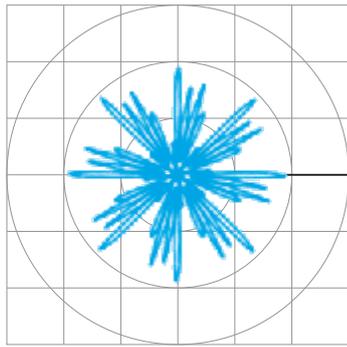
フーリエ変換^(注1)し、各次数における振幅と位相を算出することで、ステータコアに働く電磁力分布を明らかにする。

2.2 電磁界解析結果

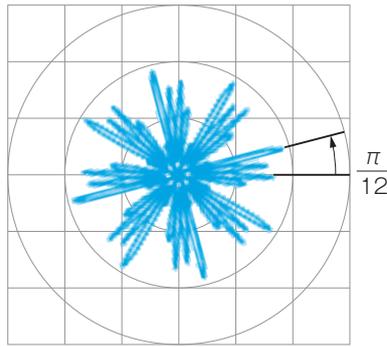
第2図に磁束線の時間変化を示す。ここで、第2図のモデルは磁束線の全体分布を見るため、解析結果を拡張した π モデルとして表す。また、電磁界解析で求めた磁束密度を、式(1)を用い半径方向電磁力に変換する。第3図に半径方向電磁力の時間変化を示す。図中の角度はロータの回転角度を表す。第2図と第3図から、半径方向電磁力はロータとともに回転していることが分かる。

第4図に半径方向電磁力の空間分布を示す。横軸は周方向の角度、縦軸は σ_r である。この結果を空間についてフーリエ変換した結果を第5図に示す。横軸は空間分布形状を表す節直径数 κ 、縦軸は振幅である。また図中の絵は、節直径数 κ における空間分布形状を示し、節直径数 κ は8の整数倍を含んでいることが分かる。

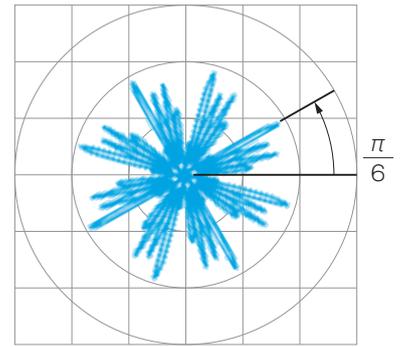
第6図に節直径数8の振幅の関係を示す。節直径数 $\kappa=8$ における振幅は時間によって変化していることが分かる。第7図に電気角次数と振幅の関係を示す。電磁力を電気角1周期でフーリエ変換した結果で、電気角次数 $l=6, 12$ で値が大きくなっていることが分かる。つまり $l=6, 12$ における周波数で半径方向に変動している。ただし、第6図から分かるように、節直径数 $\kappa=8$ における振幅の時間変化は、直流成分が98%程度であるため、振幅の時間変化は関係なく検討する。



(a) $t/T_e=0$



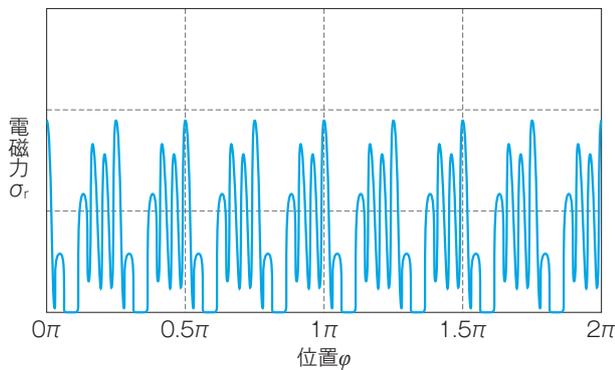
(b) $t/T_e=1/6$



(c) $t/T_e=1/3$

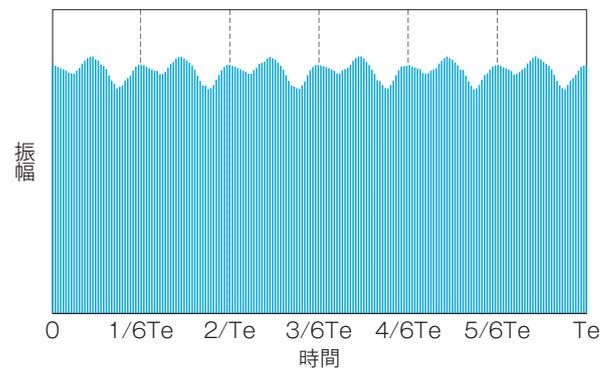
第 3 図 半径方向電磁力の時間変化

半径方向電磁力は、ロータとともに回転していることを示す。



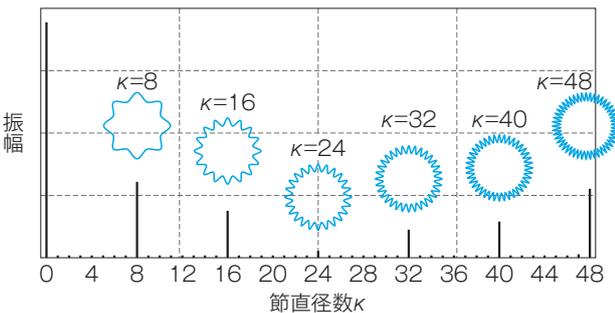
第 4 図 半径方向電磁力の空間分布

半径方向電磁力は、周期性を持っていることを示す。



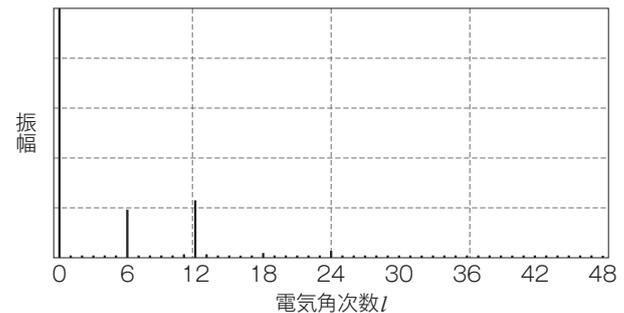
第 6 図 節直径数 8 の振幅の時間変化

半径方向電磁力は、ロータとともに回転するだけではなく、半径方向にも変動することを示す。



第 5 図 節直径数と振幅の関係

半径方向電磁力の空間分布は、節直径数 8 の整数倍が重畳することを示す。



第 7 図 電気角次数と振幅の関係

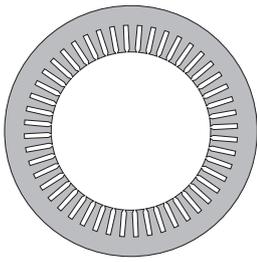
電気角次数は、6次及び12次で値が大きいが、これは $6f_e \cdot 12f_e$ の周波数で半径方向に変動していることを示す。

3 共振条件の明確化

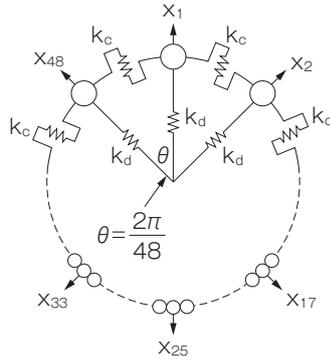
3.1 運動方程式と対角化表現

周期構造物の振動解析は、タービン翼などで多く報告されている⁽²⁾。その考え方を第 8 図 (a) に示す

48スロットのステータコアを想定した(b)の48自由度系モデルに適用する。周方向に48個の質点を配置し、各質点の半径方向変位を x_i ($i = 1 \sim 48$)、質点間のばねを k_c 、各質点の半径方向ばねを k_d とする。質点間の位相は $\theta = 2\pi / 48 = \pi / 24$ である。この



(a) ステータコア形状



(b) 48自由度系モデル

第 8 図 ステータコアモデル

ステータコア形状及び縮小した 48 自由度系モデルを示す。

48 自由度周期構造物系の運動方程式は、変位ベクトル $\mathbf{X}_{48} = [x_1, x_2, \dots, x_{48}]^t$ として一般に次式で表される。

$$\mathbf{M}_{48} \ddot{\mathbf{X}}_{48} + \mathbf{K}_{48} \mathbf{X}_{48} = \boldsymbol{\sigma}_{48} f \dots\dots\dots(2)$$

\mathbf{M}_{48} は質量行列 (48 × 48), \mathbf{K}_{48} は剛性行列 (48 × 48), $\boldsymbol{\sigma}_{48}$ は入力行列 (48 × 1) である。 f は加振力の時間関数で、加振周波数 ν の調和加振の場合は $f = \cos \nu t$ と定義する。 \mathbf{M}_{48} 行列は各質量 m を対角に並べた対角行列である。

$$\mathbf{M}_{48} = \text{diagonal} [m, m, \dots, m]^t \dots\dots\dots(3)$$

一方、 \mathbf{K}_{48} 行列は周期構造物のため次式で表す。

$$\mathbf{K}_{48} \mathbf{X}_{48} = \begin{bmatrix} k_d + 2k_c & -k_c & 0 & \dots & 0 & 0 & -k_c \\ -k_c & k_d + 2k_c & -k_c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_c & k_d + 2k_c & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_d + 2k_c & -k_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_c & k_d + 2k_c & -k_c \\ -k_c & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_c & k_d + 2k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{46} \\ x_{47} \\ x_{48} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(4)$$

次に式(2)を対角化するために、周期構造物系特有の座標変換 \mathbf{W} を定義する。

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} e^{j\theta} & e^{2j\theta} & \dots & e^{46j\theta} & e^{47j\theta} & 1 \\ e^{2j\theta} & e^{4j\theta} & \dots & e^{46j2\theta} & e^{47j2\theta} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{j46\theta} & e^{2j46\theta} & \dots & e^{46j46\theta} & e^{47j46\theta} & 1 \\ e^{j47\theta} & e^{2j47\theta} & \dots & e^{46j47\theta} & e^{47j47\theta} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{j\theta} & e^{2j\theta} & \dots & e^{-2j\theta} & e^{-j\theta} & 1 \\ e^{2j\theta} & e^{4j\theta} & \dots & e^{-4j\theta} & e^{-2j\theta} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{46j\theta} & e^{92j\theta} & \dots & e^{-92j\theta} & e^{-46j\theta} & 1 \\ e^{47j\theta} & e^{94j\theta} & \dots & e^{-94j\theta} & e^{-47j\theta} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(5)$$

ただし、 j は虚数単位、 $\theta = 2\pi/48 = \pi/24$ である。この行列は対称行列 $\mathbf{W} = \mathbf{W}^t$ である。また、1 列目から 47 列目を概観すると、1 列目と 47 列目、2 列目と 46 列目、 \dots 、23 列目と 25 列目が共役関係にある。すなわち、 \mathbf{W} の K 列目の列ベクトルを $\mathbf{w}^t(K)$ と書くと、

$$\mathbf{w}^t(K) = \bar{\mathbf{w}}^t(48 - K) \dots\dots\dots(6)$$

である。この \mathbf{W} を用いた座標変換を施す。

$$\mathbf{X}_{48} \equiv \mathbf{W} \mathbf{Y}_{48} \equiv \mathbf{W} [y_1, y_2, y_3, \dots, y_{48}]^t \dots\dots\dots(7)$$

具体的には、式(7)を式(2)に代入し、左から \mathbf{W} の転置行列の共役を掛ける。その結果は次のように対角行列となる。

$$\bar{\mathbf{W}}^t \mathbf{M}_{48} \mathbf{W} \equiv \mathbf{M}_{48}^* = \text{diagonal} [m_1, m_2, m_3, \dots, m_{48}] = m_t \mathbf{E}_{48} \dots\dots\dots(8)$$

ただし、 \mathbf{E}_{48} は 48 次元の単位行列、 m_t は全質量 (48 m) である。

$$\bar{\mathbf{W}}^t \mathbf{K}_{48} \mathbf{W} \equiv \mathbf{K}_{48}^* = \text{diagonal} [k_1, k_2, k_3, \dots, k_{24}, \dots, k_{48}] = \text{diagonal} [k_1, k_2, k_3, \dots, k_{23}, k_{24}, k_{23}, \dots, k_1, k_{48}] \dots\dots\dots(9)$$

よって、式(2)はモードごとに独立した次の 48 個の式となる。

$$\begin{cases} m_t \ddot{y}_1 + k_1 y_1 = \bar{\mathbf{w}}^t(1) \boldsymbol{\sigma} f \\ m_t \ddot{y}_2 + k_2 y_2 = \bar{\mathbf{w}}^t(2) \boldsymbol{\sigma} f \\ m_t \ddot{y}_3 + k_3 y_3 = \bar{\mathbf{w}}^t(3) \boldsymbol{\sigma} f \\ \vdots \\ m_t \ddot{y}_{23} + k_{23} y_{23} = \bar{\mathbf{w}}^t(23) \boldsymbol{\sigma} f \\ m_t \ddot{y}_{24} + k_{24} y_{24} = \bar{\mathbf{w}}^t(24) \boldsymbol{\sigma} f \\ m_t \ddot{y}_{25} + k_{23} y_{25} = \mathbf{w}^t(23) \boldsymbol{\sigma} f \end{cases} \dots\dots\dots(10)$$

$$\begin{cases} \vdots \\ m_t \ddot{y}_{47} + k_1 y_{47} = \mathbf{w}^t(1) \boldsymbol{\sigma} f \\ m_t \ddot{y}_{48} + k_{48} y_{48} = \bar{\mathbf{w}}^t(48) \boldsymbol{\sigma} f \end{cases}$$

これにより、モードごとの1自由度系の応答を考え、その総和が全体の応答であるというモード解析の考えが成立する。モードごとに分離されたため、その固有振動数 ω_K を式(11)に示す。

$$\omega_K^2 = \omega_{48-K}^2 = \frac{k_K}{m_t} \dots \dots \dots (11)$$

3.2 座標変換行列Wのモード

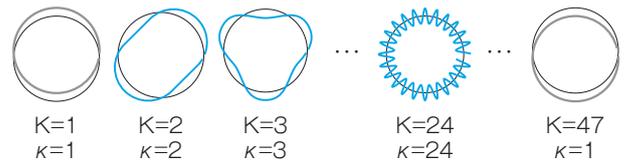
変換行列 \mathbf{W} の K 列ベクトル $\mathbf{w}^t(K)$ を検討する。ステータコア1周分のティース番号 N は1から48である。 \mathbf{W} 行列の K 列目 $\mathbf{w}^t(K)$ は、 K が24までは $\mathbf{w}^t(K) = [e^{Kj\theta}, e^{2Kj\theta}, \dots, e^{47Kj\theta}, 1]^t$ で、 N 番目のティースの変位は、実部が $\cos KN\theta = \cos \frac{\pi}{24} KN$ 、虚部が $\sin KN\theta = \sin \frac{\pi}{24} KN$ となり、節直径数 $\kappa = K$ のモードとなる。また、24列目 $\mathbf{w}^t(24)$ は隣同士の質点が逆相で動く最も節直径数が多いモードとなる。25列目以降は折り返し、 K 列目のモードが節直径数 $\kappa = 48 - K$ のモードとなる。 $K = 48$ 列目 $\mathbf{w}^t(48)$ は $\mathbf{w}^t(48) = [1, 1, \dots, 1]^t$ で、全質量が同じ動きをする同相モードとなる。第9図に \mathbf{W} 行列のモード形状を示す。 K は \mathbf{W} 行列の列を、 κ はそのモードの節直径数を表す。上段(a)が \mathbf{W} 行列の列ベクトルの実部が作るモードで、下段(b)は虚部が作るモードである。

3.3 モード励振力と共振条件

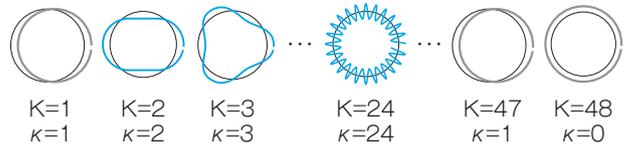
ステータコアの周方向に分布する電磁加振力 $\boldsymbol{\sigma}$ は、一周分をフーリエ変換して式(12)となる。

$$\boldsymbol{\sigma}(\varphi) = b_0 + \sum_{j=1}^{\max} \{b_{cj} \cos(j\varphi) + b_{sj} \sin(j\varphi)\} \dots \dots (12)$$

ただし、 $\varphi = 0 \sim 2\pi$ 、 b_0 は直流成分、 b_{cj} は J 次高調波の \cos 成分の振幅、 b_{sj} は J 次高調波の \sin 成分の振幅である。よってモード励振力は $\bar{\mathbf{W}}^t \boldsymbol{\sigma}$ で、式(10)の右辺である。この値が存在するのは、 K 次モードと励振モード次数 J が一致した $K = J$ の場合である。



(a) 実部が作るモード



(b) 虚部が作るモード

第9図 W行列のモード形状

\mathbf{W} 行列の列ベクトルにおけるモード形状を示す。

例えば、 $K = J = 1$ を考える。 $K = 1$ のモードを式(13)に示す。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{w}}(1) &= [e^{-j\theta}, e^{-2j\theta}, \dots, e^{-47j\theta}, 1] \\ &= [\cos \varphi - j \sin \varphi] \dots \dots \dots (13) \end{aligned}$$

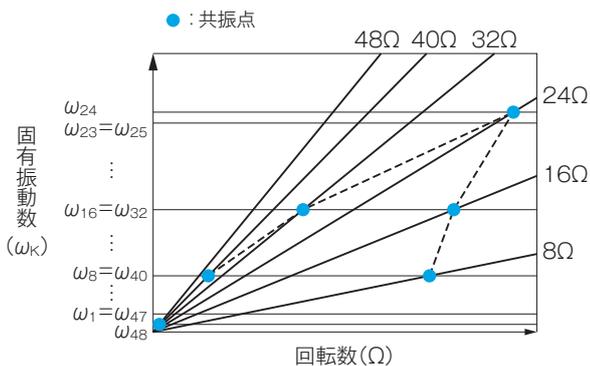
ただし、 $\varphi = n\theta$ 、 $n = 1 \sim 48$ である。この $\bar{\mathbf{w}}(1)$ に対して、式(12)の加振力の分 $\sigma(\varphi)$ を掛けて積分したとき、 $J = 1$ である $\sigma(\varphi) = b_{c1} \cos \varphi + b_{s1} \sin \varphi$ のみが値として残り、刺激係数 $\bar{\mathbf{W}}^t \boldsymbol{\sigma}$ は、式(14)となる。

$$\begin{aligned} \bar{w}\sigma(\varphi) &= \int_0^{2\pi} (\cos \varphi - j \sin \varphi) (b_{c1} \cos \varphi + b_{s1} \sin \varphi) d\varphi \\ &= \pi (b_{c1} - j b_{s1}) \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

よって、式(10)を書き改め、モード減衰比 ζ_i をつけて各モードの運動方程式を表すと、式(15)となる。

$$\begin{cases} m_t (\ddot{y}_1 + 2\zeta_1 \omega_1 \dot{y}_1 + \omega_1^2 y_1) = \pi (b_{c1} - j b_{s1}) f \\ m_t (\ddot{y}_2 + 2\zeta_2 \omega_2 \dot{y}_2 + \omega_2^2 y_2) = \pi (b_{c2} - j b_{s2}) f \\ m_t (\ddot{y}_3 + 2\zeta_3 \omega_3 \dot{y}_3 + \omega_3^2 y_3) = \pi (b_{c3} - j b_{s3}) f \\ \vdots \\ m_t (\ddot{y}_{24} + 2\zeta_{24} \omega_{24} \dot{y}_{24} + \omega_{24}^2 y_{24}) = \pi (b_{c24} - j b_{s24}) f \\ m_t (\ddot{y}_{25} + 2\zeta_{23} \omega_{23} \dot{y}_{25} + \omega_{23}^2 y_{25}) = \pi (b_{c23} + j b_{s23}) f \\ \vdots \\ m_t (\ddot{y}_{47} + 2\zeta_1 \omega_1 \dot{y}_{47} + \omega_1^2 y_{47}) = \pi (b_{c1} + j b_{s1}) f \\ m_t (\ddot{y}_{48} + 2\zeta_{48} \omega_{48} \dot{y}_{48} + \omega_{48}^2 y_{47}) = 2\pi b_0 f \end{cases} \dots \dots (15)$$

式(15)をまとめると共振条件は以下の二つとなる。



第10図 キャンベル線図

共振条件を満たす●印の部分で、共振が発生することを示す。

- (1) $K = J$, すなわちモード形状 \bar{W}^T と電磁加振力 σ との内積が存在すること
- (2) $\nu = \omega_K$; すなわち加振周波数 ν が固有振動数 ω_K に一致すること

第10図にキャンベル線図を示す。縦軸はステータコアの固有振動数を、横軸はロータの回転速度を示す。斜め線は J 次の電磁加振力を回転数 f_r で与えた場合の加振周波数を表す。2項の電磁力の結果で、加振力となる半径方向電磁力分布は周方向に8の整数倍の次数となることから、 $J = 8, 16, 24, 32, 40, 48$ となる。このことを踏まえ、(1)(2)の共振条件を満たす値をキャンベル線図に書き加えると、第10図中の●印で共振を起こすことが分かる。

4 むすび

IPMSMを対象とする共振条件を紹介した。詳細な電磁界解析及び適切なモデル化を行うことで、共振点を予測することができる。この研究結果を応用することで、ステータコアの共振回避設計を実現で

き、今後のIPMSMの音振動特性の向上に貢献していく。

最後に、音振動解析技術の研究開発を進めるにあたり、ご助言・ご指導・理論検討をいただいた防衛大学校名誉教授 松下先生に感謝の意を表する次第である。

・本論文に記載されている会社名・製品名などは、それぞれの会社の商標又は登録商標である。

〔注記〕

注1. フーリエ変換：時間や空間座標が変数である関数を、周波数に変数である関数に変換すること

《参考文献》

- (1) 浅野能成・本田幸夫・武田洋次・森本茂雄：「集中巻永久磁石同期モータのラジアル応力に着目した振動低減」, 電学論D, Vol.121, No.11, pp.1185-1191, 2001
- (2) 松下修己・田中正人・神吉博・小林正生：「回転機械の振動 実用的振動解析の基本」, コロナ社, pp.227-258

《執筆者紹介》



鈴木 照平
Shohei Suzuta
経営企画本部事業開発部
音振動解析技術の研究・開発に従事



坂本 宏紀
Hiroki Sakamoto
基盤技術研究所
電磁機器に関わる解析技術の研究・開発に従事



姉川 憲永
Norihisa Anegawa
基盤技術研究所
音振動解析技術の研究・開発に従事